Liczby i zbiory od A do Z

Piotr Milewski

ZŁOTE MYŚLI

Maturalne repetytorium z matematyki

Data: 08.08.2006

Tytuł: Maturalne repetytorium z matematyki – liczby i zbiory (fragment utworu)

Autor: Piotr Milewski

Projekt okładki: Marzena Osuchowicz

Korekta: Sylwia Fortuna

Skład: Anna Popis-Witkowska

Internetowe Wydawnictwo Złote Myśli

Złote Myśli s.c.

ul. Daszyńskiego 5

44-100 Gliwice

WWW: www.ZloteMysli.pl

EMAIL: kontakt@zlotemysli.pl

SPIS TREŚCI

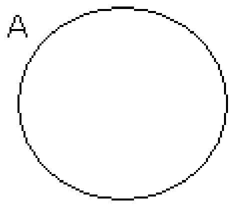
1. Co to jest zbiór, suma, iloczyn i różnica zbiorów, dopełnienie zbioru; własności działań na zbiorach?

Definicje i wzory:

Zbiór jest to pojęcie pierwotne. Oznacza to, że się go nie definiuje, że jest to pojęcie intuicyjne i oczywiste. Możemy jednak spróbować określić, czym jest zbiór. Jest to kolekcja, zespół różnych elementów, które są rozpatrywane jako całość. Mogą to być liczby, przedmioty, osoby itd.

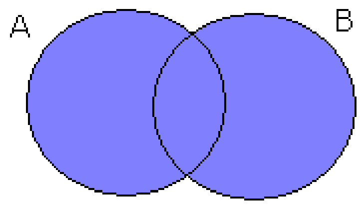
Zbiór przedstawiamy w matematyce na kilka sposobów:

- graficznie, np.

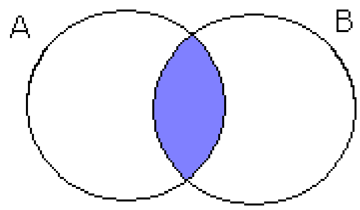


- za pomocą wyliczenia, wypisując elementy, np. $A=\{1,2,3,4\}$

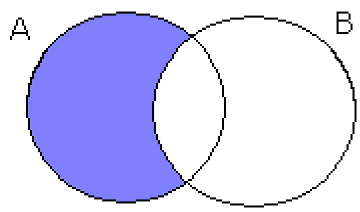
Sumą zbiorów A i B $(ozn.\ A\cup B)$ nazywamy zbiór wszystkich tych elementów, które należą do zbioru A lub do zbioru B. Innymi słowy, jest to zbiór elementów, które należą do co najmniej jednego ze zbiorów: A, B.



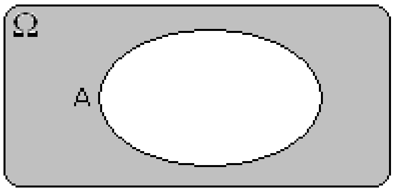
Iloczynem zbiorów A i B $(ozn.\ A \cap B)$ nazywamy wszystkie elementy, które jednocześnie należą do obu tych zbiorów. Inaczej rzecz biorąc jest to część wspólna tych zbiorów (A i B).



Różnicą zbiorów A i B $(ozn.\ A \setminus B)$ nazywamy wszystkie elementy, które należą do zbioru A, ale nie należą do zbioru B.



Dopełnieniem zbioru A do przestrzeni 'Ω nazywamy wszystkie te elementy zbioru 'Ω, które nie należą do zbioru A, czyli $\Omega \setminus A$ i oznaczamy A'



Podstawowe zasady działań na zbiorach:

$(A \cup B)' = A' \cap B'$ - I prawo De Morgana

$(A \cap B)' = A' \cup B'$ - II prawo De Morgana

$A \cap B = B \cap A$ - przemienność iloczynu zbiorów

$A \cup B = B \cup A$ - przemienność sumy zbiorów

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ - łączność iloczynu zbiorów

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ - łączność sumy zbiorów

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ - rozdzielność dodawania zbiorów względem mnożenia

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ - rozdzielność mnożenia zbiorów względem dodawania

Sposób rozwiązywania zadań:

Większość zadań dotycząca działań na zbiorach opiera się na prostych regułach rozumowania. Podane są pewne zbiory i należy znaleźć ich sumę, różnicę bądź iloczyn. Zasadniczo istnieją 3 typy takich zadań:

1. Określone są zbiory liczbowe. Naszym zadaniem jest wskazanie tych, które należą do ich różnicy, sumy lub iloczynu. Zbiory te mogą być przedstawione za pomocą przedziałów liczbowych (co

dokładnie zostanie omówione w punkcie 7' wymagań egzaminacyjnych) lub wyliczeń.

2. W postaci graficznej przedstawione są 2-3 zbiory na płaszczyźnie. Należy zaznaczyć sumę, różnicę, iloczyn. Innym wariantem tego zadania jest zapisanie za pomocą działań na zbiorach zaznaczonego obszaru.
3. Zadania podobne jak w podpunkcie 1. lub 2., ale należy skorzystać z zasad działań na zbiorach przedstawionych powyżej.

Aby rozwiązać zadania z punktu 1. postępujemy w następujący sposób:

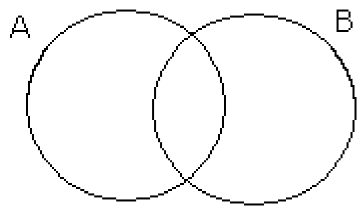
I sposób:

- Jeżeli zbiór jest przedstawiony w postaci wyliczenia, to określamy jasno, które elementy należą do którego zbioru. Następnie w razie konieczności oznaczamy dane zbiory – najlepiej pierwszymi literami alfabetu: A, B, C.
- Jeśli mamy wskazać zbiór będący sumą zbiorów A i B, to szukamy tych, które należą do któregokolwiek z nich. Jednym słowem są to wszystkie elementy z A + wszystkie elementy z B.
- Jeśli naszym zadaniem jest wskazanie zbioru będącego różnicą zbiorów A i B, tzn. $A \setminus B$ to szukamy tych elementów, które należą do A, ale nie należą do B.
- Jeżeli natomiast naszym zadaniem jest wskazanie iloczynu, to wypisujemy elementy należące jednocześnie do obydwu zbiorów.

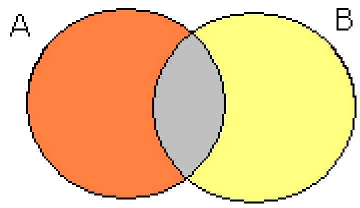
Warto zauważyć, że jest jeszcze jeden sposób:

II sposób:

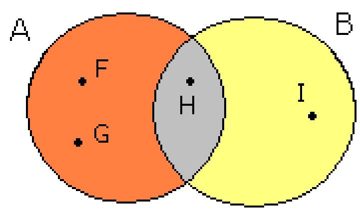
- Rysujemy okręgi w postaci następującej (dla 2 zbiorów)



- Sprawdzamy każdy element po kolei, patrząc czy należy do zbioru A, czy do zbioru B, czy może do obu jednocześnie. W pierwszym przypadku wpisujemy do obszaru zaznaczonego na pomarańczowo, w drugim do żółtego obszaru, a jeśli do obu, to wpisujemy do obszaru szarego.



- Teraz widać jasno i wyraźnie, które elementy należą do którego zbioru. Dla przykładu: elementy F oraz G należą do zbioru A, ale nie należą do zbioru B (czyli należą do A, a także do różnicy $A \setminus B$ oraz sumy $A \cup B$, ale nie należą do iloczynu $A \cap B$ ani różnicy $B \setminus A$). Element I należy do B, ale nie należy do A (należy więc do różnicy $B \setminus A$ oraz sumy $A \cup B$, ale nie należy do iloczynu $A \cap B$ ani różnicy $A \setminus B$). Element H należy jednocześnie do obu tych zbiorów, czyli nie należy do którejkolwiek różnicy, ale należy do sumy zbiorów $A \cup B$ oraz do ich iloczynu $A \cap B$.



- Pozostaje nam wypisać to, co zauważyliśmy.

W sytuacji, gdy mamy rozwiązać zadanie typu drugiego (z punktu 2.), postępujemy analogicznie do opisanego powyżej sposobu, bądź po prostu zauważamy, spostrzegamy rozwiązania.

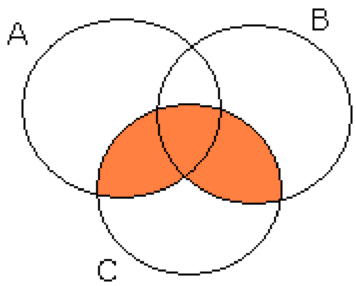
Jeśli mamy zaznaczyć na płaszczyźnie w postaci graficznej sumę zbiorów A i B, to zaznaczamy całe zbiory (wszystkie elementy zbiorów) A oraz B. W przypadku różnicy zbiorów $A \setminus B$ zaznaczamy tylko tę część zbioru A (lub tylko te jego elementy), która nie należy do B. Jeśli mamy wskazać iloczyn A i B, to zaznaczmy część wspólną (bądź elementy wspólne).

W przypadku nieco trudniejszych postaci, np. $(A \cap B) \setminus C$ najpierw zaznaczamy iloczyn w nawiasie $A \cap B$, a następnie od powstałego iloczynu odejmujemy zbiór C. Innymi słowy, najpierw wykonujemy działania w nawiasie najbardziej wewnętrznym (jeśli jest ich więcej), a następnie wykonujemy działania na powstałych zbiorach.

Na przykład w działaniu następującym: $F \cup ((A \cap B) \setminus C) \cup D$ działania wykonujemy w następującej kolejności:

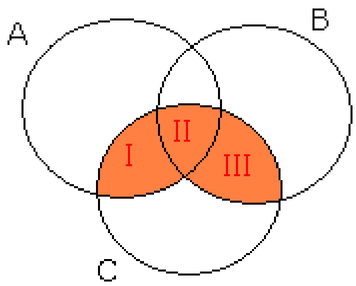
- $(A \cap B)$ - iloczyn
- $((A \cap B) \setminus C)$ - różnica
- $F \cup ((A \cap B) \setminus C) \cup D$ - sumy (bądź oddzielnie – najpierw jedną sumę, a następnie drugą – kolejność dowolna)

W sytuacji, gdy mamy opisać za pomocą działań kilka zbiorów przedstawionych w sposób graficzny na płaszczyźnie, np:



sprawdzamy, do jakich zbiorów zaznaczona część należy, a do jakich nie należy. W podanym przypadku widzimy, że należy do części wspólnych zbiorów C i B oraz C i A. Możemy więc zapisać rozwiązanie jako sumę iloczynów: $A \cap C$ oraz $B \cap C$, a więc: $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Spójrzmy na to w inny sposób. Na rysunku widzimy 3 zakolorowane części:



Opiszmy więc każdą z nich oddzielnie:

I część jest to część wspólna zbiorów A i C, ale bez części należącej do B. Możemy więc zapisać to w następujący sposób: $(A \cap C) \setminus B$.

II część jest to część wspólna wszystkich trzech zbiorów, czyli $A \cap B \cap C$.

III część jest to część wspólna zbiorów C oraz B, ale bez części należącej do A. Zapiszmy więc to w postaci: $(B \cap C) \setminus A$.

Możemy teraz zsumować te zbiory i powstanie nam zaznaczony na pomarańczowo obszar:

$$((A \cap C) \setminus B) \cup (A \cap B \cap C) \cup ((B \cap C) \setminus A)$$

Korzystając z własności działań na zbiorach możemy doprowadzić do postaci $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

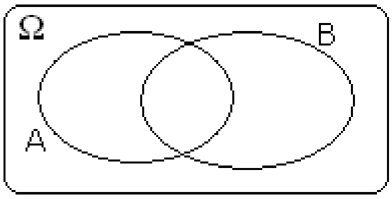
Warto jednak zauważyć, że można to znacznie uprościć, jeśli przedstawimy obszary w nieco inny sposób:

Suma I i II części – część wspólna A i C, czyli $A \cap C$
Suma II i III części – część wspólna B i C, czyli $B \cap C$

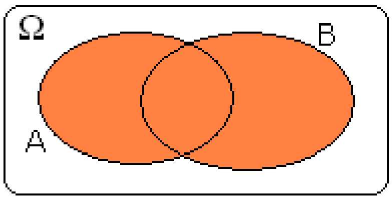
Wystarczy teraz tylko zsumować powstałe zbiory i otrzymujemy rozwiązanie: $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Pozostał jeszcze jeden typ zadań – zadania z punktu 3. W zadaniach tych postępujemy analogicznie do zadań z punktów 1. oraz 2., ale korzystając z podanych własności. Nie trzeba jednak uczyć się ich na pamięć – wystarczy je zrozumieć. Bardzo dobrym sposobem na to jest rozrysowanie sobie tych równości w postaci graficznej krok po kroku. Dzięki temu bardzo łatwo jest zrozumieć sens tego zapisu.

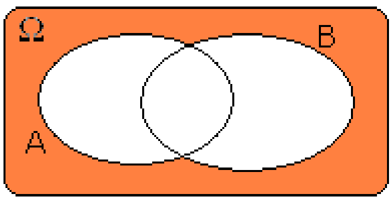
Dla przykładu rozważę I prawo De Morgana: $(A \cup B)' = A' \cap B'$



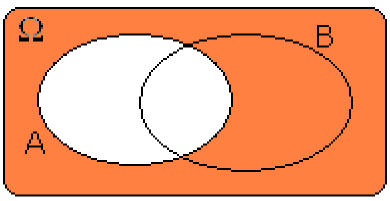
Najpierw rozrysowuję lewą stronę równania, tzn. $(A \cup B)'$. Zaczynam od sumy $A \cup B$:

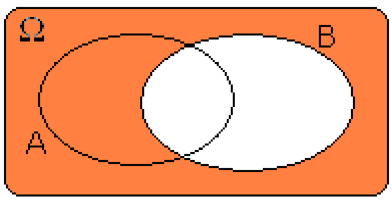


Następnie muszę narysować dopełnienie powstałego zbioru, czyli $(A \cup B)'$:



Teraz rozrysowuję prawą stronę równania, a mianowicie: $A' \cap B'$. Zaczynam od najprostszych elementów, a mianowicie: A' oraz B':





Następnie mnożę przez siebie powstałe zbiory (tzn. wyznaczam część wspólną $A'\cap B'$):

Jak widać powstały zbiór jest równy temu, który otrzymaliśmy wyznaczając lewą stronę równania. Tym samym dowiedliśmy prawdziwości I prawa De Morgana. Nie jest to dowód formalny, ale ukazuje, czym są i z czego powstają te prawa oraz zasady działań na zbiorach.

8. Zasada indukcji matematycznej

Definicje i wzory:

Indukcja matematyczna – sposób dowodzenia twierdzeń , które odnoszą się do liczb całkowitych, dokonany w następujący sposób:

Niech **P(n)** będzie twierdzeniem dla liczby n należącej do liczb całkowitych. Można udowodnić twierdzenie **P(n)** (o ile jest prawdziwe) dla każdej liczby całkowitej (najczęściej jednak brane są pod uwagę tylko liczby naturalne). Indukcja matematyczna składa się z dwóch etapów:

I. Pokazanie, że twierdzenie **P(n)** jest prawdziwe dla pewnego n_0 - początkowego, czyli że $P(n_0)$ jest prawdziwe. Zazwyczaj n_0 jest równe 1 lub 0, czyli pierwszej liczbie, dla której obowiązuje dane twierdzenie (najczęściej jest to twierdzenie dotyczące liczb naturalnych).

II. Założenie, że twierdzenie **P(n)** jest prawdziwe dla n i pokazanie, że z tego założenia wynika, że twierdzenie **P(n)** jest prawdziwe dla n+1, czyli, że **P(n+1)** jest prawdziwe.

Sposób rozwiązywania zadań:

Aby poprawnie rozwiązywać zadania należy zrozumieć sens indukcji matematycznej. Polega ona na tym, że najpierw pokazujemy, że twierdzenie jest prawdziwe dla (np.) jedynki. Następnie pokazujemy, że z prawdziwości twierdzenia dla liczby n wynika prawdziwość dla następnej liczby. Jak można wywnioskować, jeżeli z prawdziwości twierdzenia dla liczby poprzedniej wynika prawdziwość tego twierdzenia dla liczby następnej (czyli punkt II. indukcji matematycznej), to z prawdziwości twierdzenia dla (liczby początkowej, np.) jedynki wynika prawdziwość twierdzenia dla dwójki. Dalej z prawdziwości twierdzenia dla dwójki wynika jego prawdziwość dla trójki... itd. itd. Tym samym pokazujemy prawdziwość twierdzenia dla każdej liczby całkowitej dodatniej.

Aby zrozumień dokładnie indukcję matematyczną, należy rozwiązać kilka zadań. Pokażę Ci więc na kilku przykładach, jak rozwiązywać zadania dotyczące tego zagadnienia.

Przykład I

Pokazać, że twierdzenie $1+2+3+...+n=\frac{(n+1)\cdot n}{2}$ jest prawdziwe dla każdej liczby całkowitej dodatniej.

I. Dla $n_0=1$ twierdzenie ma postać $1=\frac{(1+1)\cdot 1}{2} \Leftrightarrow 1=\frac{2}{2} \Leftrightarrow 1=1$, czyli pokazaliśmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla n początkowego równego 1.

II. Zakładam, że twierdzenie jest prawdziwe dla n, czyli zachodzi równość $1+2+3+...+n=\frac{(n+1)\cdot n}{2}$. Pokażę, że z tego założenia wynika, że twierdzenie jest prawdziwe dla n+1, czyli, że $1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2}$. Oznaczmy lewą stronę równania $L=1+2+3+...+n+(n+1)$, natomiast prawą $P=\frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2}$. Jeśli pokażę, że $L=P$, to udowodnię $1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2}$. $L=1+2+3+...+n+(n+1)$ - korzystając równości $1+2+3+...+n=\frac{(n+1)\cdot n}{2}$, podstawiam $1+2+3+...+n=\frac{(n+1)\cdot n}{2}$ do pierwszego równania. Otrzymuję więc, że

$$L=1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)\cdot n}{2}+(n+1)=(n+1)(\frac{n}{2}+1)=\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}=P$$

Udowodniłem, że $L=P$. Tym samym pokazałem, że z tego, że twierdzenie jest prawdziwe dla n wynika, że jest prawdziwe dla n +1.

Pokazałem więc, że twierdzenie jest prawdziwe dla n początkowego równego jeden oraz, że z tego, że jest prawdzie dla n, wynika, że jest prawdziwe dla n+1. Udowodniłem twierdzenie dla liczb całkowitych dodatnich.

Przykład II

Pokazać, że dla liczb naturalnych n liczba 8^n-1 jest podzielna przez 7.

I. Pokażmy prawdziwość twierdzenia dla n początkowego, $n_0=1$. Dla $n_0=1$ twierdzenie ma postać: $8^1-1=8-1=7$. Siedem jest podzielne przez siedem, czyli twierdzenie jest prawdziwe dla n początkowego.

II. Zakładamy, że twierdzenie jest prawdziwe dla n, czyli, że liczba 8^n-1. Jest to równoważne z tym, że $8^n-1=7\cdot k$, gdzie $k\in C$.

Z tego założenia wynika, że twierdzenie jest prawdziwe dla n+1, co zaraz pokażemy. Twierdzenie to dla n+1 ma postać: $8^{n+1}-1$ jest podzielne przez 7.

Jak wiemy: $8^{n+1}-1=8\cdot 8^n-1$. Musimy teraz znaleźć podobieństwo do naszego założenia, aby móc z niego skorzystać. Jak widać, w założeniu jest wyraz 8^n, tak samo w twierdzeniu dla n+1. Obliczamy 8^n z założenia: $8^n-1=7\cdot k \Leftrightarrow 8^n=7\cdot k+1$. Podstawiamy otrzymane wyrażenie do twierdzenia dla n+1:

$8\cdot 8^n-1=8\cdot(7\mathrm{k}+1)-1=7\cdot 8\cdot k+8-1=7\cdot 8\cdot k+7=7\cdot(8\cdot k+1)$. Oczywiście iloczyn liczby całkowitej i siódemki jest podzielny przez siedem. Tym samy udowodniliśmy, że z założenia o prawdziwości twierdzenia dla n wynika prawdziwość twierdzenia dla kolejnej liczby naturalnej.

Na mocy indukcji matematycznej udowodniliśmy twierdzenie.

Przykład III

Udowodnić, że $2^n \geq n^2$ dla $n \geq 4$.

I. W zadaniu mamy jasno zadane n początkowe – $n_0 = 4$. Pokazujemy prawdziwość twierdzenia dla $n_0 = 4$. Twierdzenie ma wtedy postać: $2^{n_0} \geq n_0^{\ 2} \Leftrightarrow 2^4 \geq 4^2 \Leftrightarrow 16 \geq 16$ - prawda. Twierdzenie jest prawdziwe dla $n_0 = 4$.

II. Zakładamy prawdziwość twierdzenia dla n ($n \geq 4$), czyli $2^n \geq n^2$.

Pokazujemy, że z prawdziwości twierdzenia dla n wynika prawdziwość twierdzenia dla liczby następnej, czyli n+1:

$2^{n+1} \geq (n+1)^2 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^n \geq (n+1)^2$. Korzystam z założenia: $2^n \geq n^2$:

$2 \cdot 2^n \geq (n+1)^2 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot n^2 \geq (n+1)^2 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^n \geq (n+1)^2 \Leftrightarrow 2^{n+1} \geq (n+1)^2$.

Wystarczy teraz, że udowodnimy $2 \cdot n^2 \geq (n+1)^2$ i tym samym pokażemy prawdziwość twierdzenia. $2 \cdot n^2 \geq (n+1)^2 \Leftrightarrow 2 \cdot n^2 \geq n^2 + 2\mathrm{n} + 1$ $\Leftrightarrow n^2 - 2\mathrm{n} \geq 1 \Leftrightarrow n(n-2) \geq 1$. Dla $n \geq 4$ jest to oczywiście prawda, ponieważ dla n=4 lewa strona nierówności przyjmuje wartość $4 \cdot 2 = 8$, natomiast dla większych n rośnie (ponieważ rośnie zarówno n jak i (n-2)). Udowodniliśmy twierdzenie.

Jak skorzystać z wiedzy zawartej w pełnej wersji ebooka?

Pozostałe materiały wraz z obszernym zbiorem zadań i odpowiedzi znajdziesz w pełnej wersji ebooka ”Maturalne repetytorium z matematyki: liczby i zbiory” .

Zapoznaj się z pełnym opisem na stronie:

http://matematyka-zbiory-liczby.zlotemysli.pl